Unitat 2

ELS RACIONALS

què treballaràs?

En acabar la unitat has de ser capaç de:

- **Representar mitjançant les fraccions quantitats o relacions entre quantitats.**
- **Representar nombres racionals sobre la recta numèrica.**
- **Comparar i ordenar fraccions.**
- **Reconèixer i calcular fraccions equivalents.**
- **Operar amb fraccions.**
- **Operar amb nombres decimals.**
- **Aproximar nombres decimals per arrodoniment i per truncament.**
- **Conèixer l'existència de nombres que no provenen de cap fracció.**

1. Els nombres racionals. Concepte de fracció

Xarrup de llimona

Ingredients (per a 6 persones)
1/4 quilo de sucre
1/2 litre d'aigua
2/10 litres de suc de llimona

Els nombres 1/4, 1/2 i 2/10 tenen tots tres la mateixa expressió: **a/b**. Aquests tipus de nombres s'anomenen **fraccions**.

La divisió dins del conjunt dels nombres enters només és possible quan la divisió és exacta.

:	1	2	3	4	5
−5	−5	?	?	?	−1
−4	−4	−2	?	−1	?
−3	−3	?	−1	?	?
−2	−2	−1	?	?	?
−1	−1	?	?	?	?
0	0	0	0	0	0
1	1	?	?	?	?
2	2	1	?	?	?
3	3	?	1	?	?
4	4	2	?	1	?
5	5	?	?	?	1

Mitjançant les fraccions es troba la solució a aquestes divisions que no són exactes.

:	1	2	3	4	5
−5	−5	−5/2	−5/3	−5/4	−1
−4	−4	−2	−4/3	−1	−4/5
−3	−3	−3/2	−1	−3/4	−3/5
−2	−2	−1	−2/3	−2/4	−2/5
−1	−1	−1/2	−1/3	−1/4	−1/5
0	0	0	0	0	0
1	1	1/2	1/3	1/4	1/5
2	2	1	2/3	2/4	2/5
3	3	3/2	1	3/4	3/5
4	4	2	4/3	1	4/5
5	5	5/2	5/3	5/4	1

El conjunt dels **nombres racionals** està format pels nombres enters i per les fraccions i es representa amb la lletra Q.

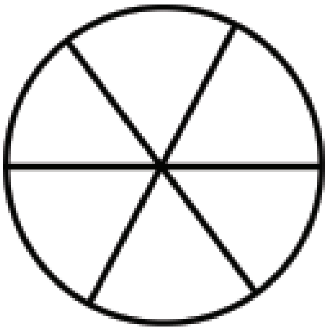
Q= {...., −3/2,...., −1,...., −1/2,...., 0,...., 1/2,...., 1,...., 3/2,....}

En el conjunt dels nombres racionals l'operació divisió sempre té solució. El quocient de dos nombres racionals sempre és un altre nombre racional.

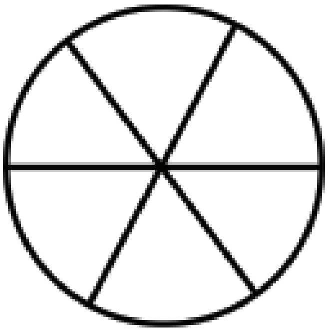
En aquest sentit, **una fracció pot representar simplement la divisió entre dos nombres enters**.

Però una fracció pot representar també una part de la unitat o una part del conjunt total.

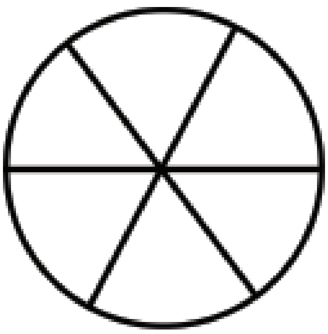
Imagina que el dia del teu aniversari et gastes 12€ en un pastís que compartiràs amb els teus amics. Com que sou 6 persones en total, dividiràs el pastís en 6 trossos iguals, naturalment.



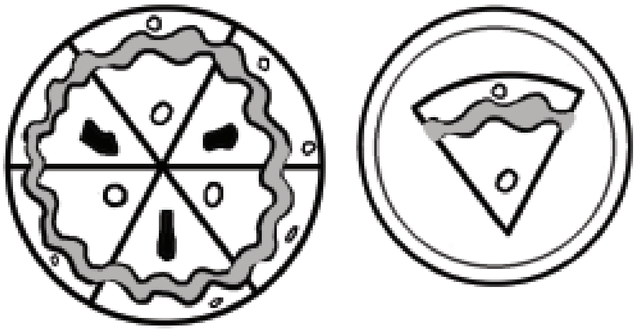
El que passa és que dos dels teus amics no en volen, de pastís, per allò del règim. Fixa't que la fracció 4/6 representa els trossos de pastís que us menjareu, de 6 que n'hi ha en total.



En canvi, el gràfic següent representa la part de pastís que no es consumirà. Dit d'una altra manera, aquest gràfic representa la fracció 2/6.



En termes econòmics hauràs malgastat 4€ ja que hauràs de llençar dos trossos de pastís i fixa't que cada tros té un valor de 2€.



Com que no es consumeixen 2/6 parts de pastís, es malgastaran **2/6 parts de 12€**. I acabem de veure que 2/6 parts de 12€ són 4€.

2/6 de 12€ = 4€

Una manera ràpida de fer aquests càlculs és:

$$2/6 \text{ de } 12 = \frac{2\text{x}12}{6} = 4$$

és a dir, es multiplica el numerador pel total, que en aquest cas és 12, i es divideix pel denominador.

Sovint en les retransmissions dels partits de bàsquet per la televisió s'ofereixen unes dades numèriques en forma de fracció que indiquen els encerts a cistella respecte dels intents d'alguns jugadors. Per exemple: 10 de 16 cistelles de 2 punts vol dir que, del total d'intents que ha fet el jugador, en aquest cas 16, n'ha encertat només 10. És a dir, 16 és el total d'intents i 10 una part d'aquests intents. Aquesta informació es representa de la forma 10/16.

10/16 és una fracció que serveix per expressar la relació entre els encerts i els intents.

En aquest sentit es pot dir que les fraccions són relacions entre nombres enters.

Una fracció està formada pel numerador, el denominador i la barra que els separa.

$$\frac{10}{16} = \frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$$

El numerador i el denominador són nombres enters.

- **Activitats d'aprenentatge 1, 2, 3, 4 i 5**

2. Comparació i ordenació de fraccions

Compara els encerts d'aquests dos jugadors de bàsquet:

El jugador núm. 15 ha fet 7 cistelles de 10 intents.

El jugador núm. 7 n'ha fet 3 de 5.

Quin dels dos jugadors ha fet més cistelles respecte dels intents?

Per poder comparar les fraccions cal ordenar-les. L'ordenació de fraccions no és tan immediata com la de nombres enters.

7/10 és més gran o més petit que 3/5? **Per poder ordenar fraccions han de tenir el mateix denominador. És el que s'anomena reduir les fraccions a denominador comú.** Un cop s'està en aquesta situació, només cal comparar els numeradors: el numerador més gran correspondrà a la fracció més gran i el numerador més petit correspondrà a la fracció més petita.

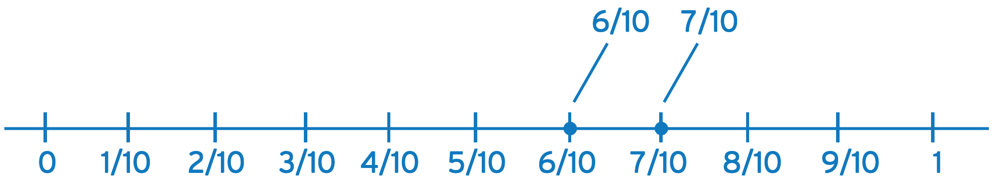
Per reduir les fraccions a denominador comú se segueixen els passos següents:

1) Es calcula el mínim comú múltiple dels denominadors de les fraccions.
   Les fraccions que volem comparar són 7/10 i 3/5. Els denominadors de cadascuna de les fraccions són 10 i 5. Per tant, s'ha de calcular el mcm (10,5). Si ho calcules veuràs que el mcm és 10. 10 serà el nou denominador en totes dues fraccions.
2) Es divideix el mcm pel denominador de cada fracció i es multiplica el quocient que s'obté pel numerador.

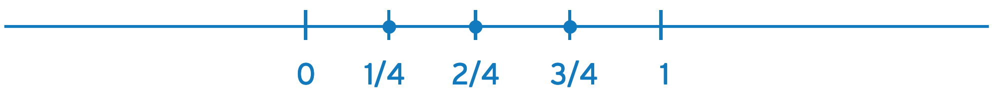
$$\frac{7}{10} = \frac{10:10\text{x}7}{10} = \frac{7}{10}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{10:5\text{x}3}{10} = \frac{6}{10}$$

Per comparar 7/10 i 3/5 només cal comparar els numeradors de les fraccions reduïdes a denominador comú: 7/10 i 6/10. Com que 7 és més gran que 6 aleshores 7/10 és més gran que 6/10. Equivalentment 7/10 és més gran que 3/5. El jugador núm. 15 ha fet més cistelles respecte dels intents que el jugador núm. 7.



Imagina que tens tres gots amb diferents quantitats d'aigua: 1/4 de litre, 2/4 de litre i 3/4 de litre.



Fixa't que aquestes quantitats no superen la unitat que en aquest cas és 1 litre d'aigua.

Observa que per les fraccions que has vist fins ara sembla que aquestes no hagin de superar mai la unitat. Però no sempre és així. Si agafem els tres gots d'abans i els aboquem en una ampolla d'1 litre, aquesta vessarà, ja que si sumem un quart, més dos quarts, més tres quarts, ens donarà sis quarts, i això és més d'un litre d'aigua ja que un litre són quatre quarts de litre. Quan les fraccions tenen el numerador més gran que el denominador, llavors superen la unitat.

- **Activitats d'aprenentatge 6, 7 i 8**

3. Operacions amb fraccions

Per sumar les fraccions d'abans, 1/4, 2/4 i 3/4, com que tenen el mateix denominador, només cal sumar els numeradors.

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1+2+3}{4}=\frac{6}{4}$$

Segur que algun cop has comprovat que si a mig litre d'aigua n'hi afegeixes un quart, obtens 3/4 de litre d'aigua. Si escrivim això en forma de fraccions es té:

1/2+1/4=3/4

Sabem el resultat, però aquesta vegada com s'han fet els càlculs?

Com que les fraccions 1/2 i 1/4 tenen diferent denominador, 2 i 4, el que fem és reduir-les a denominador comú. S'ha de calcular el mcm (2,4). Pots comprovar que dóna 4.

$$\frac{1}{2}=\frac{4:2\text{x}1}{4}=\frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{4:4\text{x}1}{4}=\frac{1}{4}$$

Per tant:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Si et beus 1/4 de litre de refresc de cola d'una ampolla de litre et queden encara 3/4 de litre de refresc per consumir. Per expressar els càlculs corresponents es pot representar 1 litre de refresc de cola mitjançant la fracció 1/1, ja que si interpretem la fracció com el quocient entre dos nombres el resultat és el nombre sencer 1.

$$1-\frac{1}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Com abans, sabem el resultat, però com s'han fet els càlculs?

Com en la suma, per restar fraccions de diferent denominador es redueixen a denominador comú. En aquest cas cal calcular el mcm (1,4) que és evident que dóna 4.

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{4} = \frac{4:1x1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

El doble de 1/2 litre d'aigua és un litre d'aigua.

La meitat de 1/2 litre d'aigua és 1/4 de litre d'aigua.

$$\frac{1}{2} \text{ x } 2 = 1 \textit{ litre}$$

$$\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4} \textit{ litre}$$

Com es fan aquests càlculs?

Per multiplicar fraccions només cal multiplicar els numeradors i multiplicar els denominadors.

$$\frac{a}{b} \text{ x } \frac{c}{d} = \frac{a \text{x} c}{b \text{x} d}$$

En l'exemple d'abans, si escrivim 2 de la forma 2/1 es té que:

$$\frac{1}{2} \text{ x } \frac{2}{1} = \frac{1\text{x}2}{2\text{x}1} = \frac{2}{2} = 1 \text{ litre}$$

Per dividir dues fraccions se li multiplica a la primera fracció la segona però amb el numerador i el denominador invertits:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \text{ x } \frac{d}{c}$$

En l'exemple d'abans, si escrivim 2 de la forma 2/1 es té que:

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{1} = \frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ litre}$$

- **Activitats d'aprenentatge 9 i 10**

4. Fraccions equivalents

Si en una ampolla d'un litre d'aigua buida s'aboca primer 1/4 de litre d'aigua i seguidament un altre 1/4 de litre d'aigua s'obté 1/2 litre d'aigua.

Si fem els càlculs corresponents es té que:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

Aleshores, perquè 2/4 de litre d'aigua i 1/2 litre d'aigua és el mateix?

Fixa't en el gràfic que representa l'ampolla plena amb 2/4 de litre d'aigua.

Per comptes de dividir el litre en quatre quarts, el dividim en dues meitats. De fet, un litre també és dos mitjos litres. Observa que la part plena de l'ampolla corresponent a 2/4 de litre coincideix amb una part de les dues que hem fet ara.

1/2 i 2/4 representen la mateixa part de la unitat o la mateixa part del total segons el cas. 1/2 i 2/4 es diu que són fraccions equivalents.

Fixa't que:

$$\frac{2}{4} = \frac{1\text{x}2}{2\text{x}2}$$

Per trobar fraccions equivalents a una altra, només cal multiplicar-li el numerador i el denominador pel mateix nombre. En aquest cas hem multiplicat pel nombre 2.

$$\frac{3}{6} = \frac{1\text{x}3}{2\text{x}3}$$

En aquest cas hem multiplicat pel nombre 3.

Per tant, 1/2 i 3/6 també són fraccions equivalents.

Una manera ràpida d'identificar si una parella de fraccions són equivalents és multiplicant-les en creu. Si s'obté el mateix producte és senyal que són **equivalents:**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$ **són equivalents si: a x d = b x c**

- **Activitats d'aprenentatge 11 i 12**

5. Els nombres decimals

Des de l'arribada de l'euro, els nombres decimals estan presents en la nostra vida. Els preus dels productes són de la forma: 12,23€, 10,50€, 4,05€, etc. A no ser que el preu sigui exacte. En aquest cas 12,00€ són directament 12€. Les monedes de l'euro han de permetre la construcció de qualsevol import amb una exactitud de dos decimals. Les monedes que permeten construir la part decimal dels imports són:

1 cèntim = 0,01 euros
2 cèntims = 0,02 euros
5 cèntims = 0,05 euros
10 cèntims = 0,1 euros
20 cèntims = 0,2 euros
50 cèntims = 0,5 euros

El que es fa són parts de la unitat: l'euro es divideix en cent parts. Cada una d'aquestes parts s'anomena cèntim. El valor d'aquestes monedes es pot expressar amb fraccions: la unitat, 1€ són 100 cèntims. Aleshores la moneda d'1 cèntim d'euro es pot expressar com 1 cèntim entre 100 cèntims, la moneda de 2 cèntims es pot expressar com 2 entre 100, etc.

1 cèntim = 1/100 €
2 cèntims = 2/100 €
5 cèntims = 5/100 €
10 cèntims = 10/100 €
20 cèntims = 20/100 €
50 cèntims = 50/100 €

Aquestes fraccions s'anomenen fraccions decimals perquè tenen com a denominador la unitat seguida de zeros.

Fixa't que els nombres decimals estan relacionats amb les fraccions. Les unitats decimals són:

1/10 = 0,1, què és la dècima
1/100 = 0,01, què és la centèsima
i 1/1000 = 0,001, què és la mil·lèsima.

Així, el número: 0,386 té 3 dècimes, 8 centèsimes i 6 mil·lèsimes.

0,386 es llegeix tres-centes vuitanta-sis mil·lèsimes.

Recorda que 1€ equival a 166,386 pessetes.

6. Aproximacions de nombres decimals

La conversió de pessetes a euros es fa per arrodoniment. Quan es divideix una quantitat de pessetes per 166,386 per saber quants euros són, de vegades surten quantitats amb una cua molt llarga de decimals. Però l'euro només treballa amb dues xifres decimals. Per arrodonir una cua de decimals a les centèsimes, ens fixem en la xifra de les mil·lèsimes. Si és més petita que 5 mantenim la xifra de les centèsimes, i si és igual que 5 o més gran augmentem una unitat la xifra de les centèsimes.

Per exemple: El preu d'una entrada de cinema en pessetes són 700 pts. En euros són 4,21€.

Si fem els càlculs:

700 : 166,386 = 4,2070847....

Com que la xifra de les mil·lèsimes és un 7, que és més gran que 5, la xifra de les centèsimes, que és 0, augmenta en una unitat i passa a ser un 1. Per tant, 4,2070847... s'arrodoneix a 4,21.

Una altra tècnica d'aproximació d'un nombre decimal a les unitats que ens interessi és el **truncament**. Per exemple, per truncar el nombre 166,386 per les centèsimes s'escriu el nombre fins a les centèsimes i se n'eliminen les xifres de la dreta: 166,38.

ACTIVITAT

Com seria el nombre 166,386 arrodonit a les centèsimes?

Solució

166,39

7. Suma i resta de nombres decimals

El preu d'una barra de pa és de 45 cèntims. Aquesta quantitat es pot pagar amb una moneda de 20 cèntims, dues monedes de 10 cèntims i finalment una moneda de 5 cèntims. Amb aquestes monedes s'abona l'import exacte.

20 cèntims + 10 cèntims + 10 cèntims + 5 cèntims = 45 cèntims.

Dit d'una altra manera:

0,20€ + 0,10€ + 0,10€ + 0,05€ = 0,45€

0,45€ és una altra manera de donar el preu de la barra de pa.

Fixa't que per pagar la barra de pa s'han de sumar nombres decimals.

Si es paga la barra de pa amb una moneda d'1€, el canvi serà de 55 cèntims ja que 1€ equival a 100 cèntims i per tant:

100 cèntims − 45 cèntims = 55 cèntims.

Dit d'una altra manera:

1€ − 0,45€ = 0,55€.

Fixa't que per tornar el canvi s'han de restar nombres decimals.

- **Activitats d'aprenentatge 13 i 14**

8. El nombre Π

Si fem la divisió entre el numerador i el denominador d'una fracció, la majoria de les vegades ens donarà un nombre decimal llevat que ens doni directament un nombre enter.

En canvi, no tots els nombres decimals es poden posar en forma de fracció.

El nombre Π és un d'aquests nombres.

L'origen del nombre Π s'ha de buscar en el càlcul de la longitud de la circumferència. Aquest càlcul fou una obsessió per a Arquimedes, màxima figura de la matemàtica grega. Des de feia força temps ja es va veure que la relació entre la longitud d'una circumferència i el seu diàmetre donava sempre el mateix nombre. Aquesta relació es pot expressar en forma de fracció. En el numerador apareix la longitud de la circumferència i en el denominador el seu diàmetre: L/d. A aquest valor, se'l va anomenar nombre d'Arquimedes i resultava molt difícil de calcular perquè la divisió no era exacta.

Avui dia sabem que el nombre Π no prové de cap fracció i que està format per una cua amb infinits decimals. Gràcies als ordinadors s'han pogut trobar més de mil milions de xifres decimals d'aquest nombre i es continua investigant.

Π = 3,14159265358979...