

Unitat 3

67

OPERACIONS AMB ENTERS

UNITAT 3 OPERACIONS AMB ENTERS

Matemàtiques, Ciència i Tecnologia 1. LA TEMPERATURA

què treballaràs?

En acabar la unitat has de ser capaç de:

- Sumar, restar, multiplicar i dividir nombres enters.
- Resoldre problemes senzills amb nombres enters.

1. Suma i resta de nombres enters

Antigament els xinesos representaven els nombres positius en color vermell i els nombres negatius en color negre. Avui dia, a la nostra societat, s'ha triat el color vermell per simbolitzar quantitats negatives. Només cal que recordem què significa per a nosaltres estar en nombres vermells. Tanmateix, quan calculem els guanys i les despeses que tenen lloc en els nostres comptes corrents no utilitzem cap nombre de cap color. En canvi, ens són molt útils els nombres enters. Els nombres enters positius representen els saldos positius, la quantitat de diners que tenim disponibles, els guanys... En canvi, els nombres enters negatius representen els saldos negatius, els deutes, les despeses...

Imagina que tens en el compte corrent un saldo positiu de 300 euros. Si s'hi fa un ingrés de 100 euros, el compte pujarà i per saber el saldo final haurem de sumar: $300 \text{ €} + 100 \text{ €} = 400 \text{ €}$.

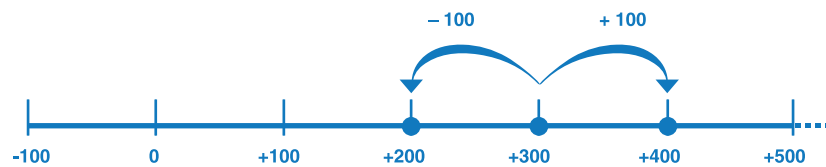
Totes aquestes quantitats són positives ja que disposem d'una quantitat inicial de 300 euros i al final encara en tindrem més:

$$(+300) + (+100) = (+400)$$

Ara bé, si el compte baixa, haurem de restar. Si disposem inicialment de 300 euros i n'extraiem 100, ens quedarà un saldo de 200 euros. En aquest cas les quantitats tornen a ser totes positives, el que passa és que ens apareixerà un símbol menys $-$ que és el que correspon a l'operació de restar:

$$(+300) - (+100) = (+200)$$

Representem gràficament aquests càlculs sobre la recta numèrica dels nombres enters:



Per sumar ens desplaçem cap a la dreta i per restar ens desplaçem cap a l'esquerra de la mateixa manera com ho faríem amb els nombres naturals.

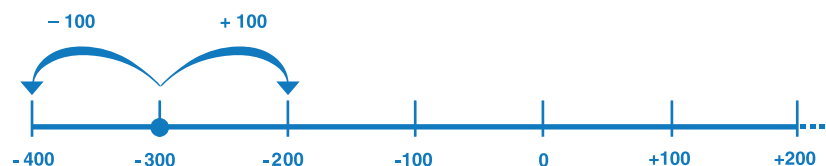
Imagina que tens un compte corrent amb un saldo negatiu de -300 euros. Si s'hi fa un ingrés de 100 euros, el deute serà menor:

$$(-300) + (+100) = (-200)$$

Però si el compte baixa, el deute serà més gran. Si deus 300 euros i en perds 100 més, acabaràs devent 400 euros:

$$(-300) - (+100) = (-400)$$

Representem aquestes dues operacions sobre la recta numèrica de nombres enters. Com abans, un cop tenim assenyalada la quantitat inicial de diners, per sumar ens desplaçem cap a la dreta i per restar ens desplaçem cap a l'esquerra.

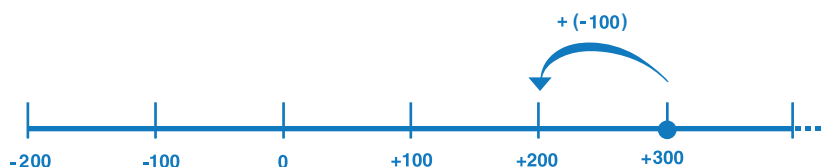


Un altre cas és quan a una quantitat entera, positiva o negativa, li hem de sumar o restar una quantitat negativa. El que es fa és invertir el sentit del desplaçament sobre la recta numèrica.

És a dir, per sumar ens desplaçem cap a l'esquerra i per restar ens desplaçem cap a la dreta:

$$(+300) + (-100) = ??$$

Si ho resollem gràficament ens hem de desplaçar cap a l'esquerra:



Per tant:

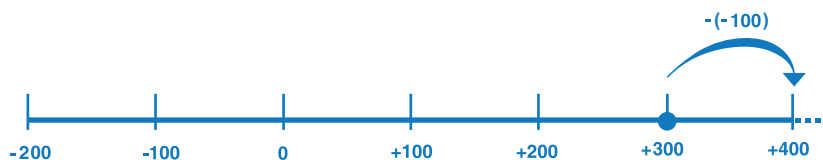
$$(+300) + (-100) = +200$$

ACTIVITAT 1

$$(+300) - (-100) = ??$$

Solució

Si ho resollem gràficament, ens hem desplaçar cap a la dreta:



Per tant:

$$(+300) - (-100) = +400$$

Fins ara hem vist que:

$$(+300) + (+100) = +400$$

$$(+300) - (+100) = +200$$

$$(-300) + (+100) = -200$$

$$(-300) - (+100) = -400$$

$$(+300) + (-100) = +200$$

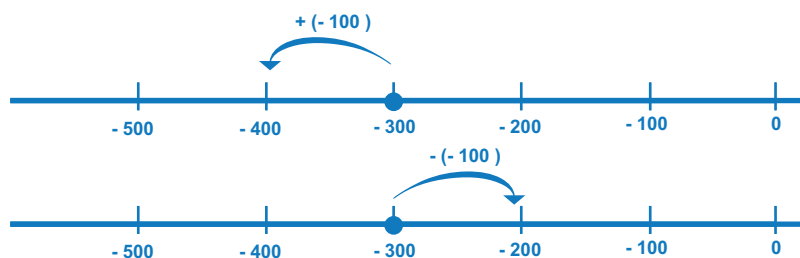
$$(+300) - (-100) = +400$$

ACTIVITAT 2

Pots provar de resoldre gràficament sobre la recta numèrica de nombres enters les operacions:

$$(-300) + (-100) = ?$$

$$(-300) - (-100) = ?$$

Solució

Els resultats són respectivament -400 i -200 .

$$(-300) + (-100) = -400$$

$$(-300) - (-100) = -200$$

Notació simplificada de sumes i restes de nombres enters

Escriure constantment parèntesis en les operacions amb nombres enters pot resultar força pesat. Les operacions es poden escriure sense parèntesis de la manera següent:

Si al davant del parèntesi d'un nombre enter hi ha el símbol **+** de l'operació de sumar, podem eliminar aquest símbol de la suma i escriure directament el signe del nombre enter que hi ha dins del parèntesi:

$$(+300) + (+100) = +300 + 100$$

$$(-300) + (+100) = -300 + 100$$

$$(+300) + (-100) = +300 - 100$$

Si el que hi ha davant del parèntesi és el símbol **-** de l'operació de restar, podem prescindir d'aquest símbol i escriure únicament el signe contrari del nombre enter que tenim dins del parèntesi:

$$(+300) - (+100) = +300 - 100$$

$$(-300) - (+100) = -300 - 100$$

$$(+300) - (-100) = +300 + 100$$

Si al començament de les operacions hi ha un nombre positiu, el podem escriure com si es tractés d'un nombre natural, és a dir, sense el signe **+**:

$$(+300) + (+100) = 300 + 100$$

$$(+300) + (-100) = 300 - 100$$

$$(+300) - (-100) = 300 + 100$$

Si resulta molest treballar amb tants parèntesis, també ho és desplaçar-se per la recta numèrica cada cop que volem fer una suma o una resta. El que es fa és usar un mètode més senzill per sumar i restar nombres enters:

Si els nombres tenen el mateix signe, el resultat també tindrà aquest mateix signe i només caldrà sumar els valors absoluts dels nombres.

Exemple:

$$(+300) + (+100) = +300 + 100 = +400$$

$$(-300) - (+100) = -300 - 100 = -400$$

Si els nombres tenen signes diferents, el resultat s'obté restant els valors absoluts d'aquests i posant el signe del nombre que té el valor absolut més gran.

Exemple:

$$(+300) - (+100) = +300 - 100 = +200$$

$$(-300) + (+100) = -300 + 100 = -200$$

Els caixers automàtics ens ofereixen la possibilitat de visualitzar per pantalla, i fins i tot d'imprimir, els darrers moviments dels comptes corrents:

BANCA NOSTRA		
14 de maig de 2002	Saldo inicial	300 €
	Llum	-60 €
	Gas	-40 €
	Ingrés	+150 €
	Lloguer	-600 €
	Saldo final

Per calcular el saldo final, els ordinadors d'aquesta entitat bancària han de resoldre les operacions següents:

$$300 - 60 - 40 + 150 - 600 = \dots\dots\dots$$

Una manera pràctica de fer els càlculs és:

- 1) Sumar tots els enters positius.

Enters positius	
	+300
	+150
Total	+450

- 2) Sumar tots els enters negatius.

Enters negatius	
	-60
	-40
	-600
Total	-700

- 3) Restar els resultats anteriors i posar el signe del que tingui el valor absolut més gran.

$$450 - 700 = -250$$

En definitiva:

$$300 - 60 - 40 + 150 - 600 = 450 - 700 = -250$$

BANCA NOSTRA

14 de maig de 2002			
	Saldo inicial		300 €
	Llum		-60 €
	Gas		-40 €
	Ingrés		+150 €
	Lloguer		-600 €
	Saldo final		-250 €

- **Activitats d'aprenentatge 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8**

Element neutre i element oposat

Segur que estàs d'acord que no és el mateix tenir 250 euros que deure 250 euros:

BANCA NOSTRA

14 de maig de 2002			
	Saldo final		+250 €

BANCA NOSTRA

14 de maig de 2002			
	Saldo final		-250 €

Aquestes dues quantitats, tot i que s'assemblen força, tenen un significat completament oposat. Recorda que a la unitat 1 ja vam veure que el nombre (-250) és l'oposat del nombre (+250) i al revés, (+250) és l'oposat del nombre (-250). Observa que si disposes de 250 euros però en deus justament 250 et quedaràs amb un saldo de 0 euros.

El nombre 0 és l'**element neutre** de la suma i de la resta de nombres enters. Si sumes o restes 0 a qualsevol nombre enter, el resultat serà el mateix nombre enter. Si sumes un nombre i el seu oposat el resultat sempre serà 0.

Exemple:

$$(+250) + (-250) = 250 - 250 = 0.$$

Si sumes o restes 0 a qualsevol nombre enter torna a donar com a resultat el mateix nombre:

$$(+250) + 0 = +250$$

$$(-250) + 0 = -250$$

74 Propietats commutativa i associativa

Compte corrent 1

BANCA NOSTRA			
14 de maig de 2002	Ingrés		+150 €
15 de maig de 2002	Lloguer		-600 €

Compte corrent 2

BANCA NOSTRA			
14 de maig de 2002	Lloguer		-600 €
15 de maig de 2002	Ingrés		+150 €

Aquests són els moviments efectuats en dos comptes corrents els dies 14 i 15 de maig.

Si els observes t'adonaràs que en tots dos comptes corrents la despesa final serà la mateixa, 450 euros, ja que les quantitats de diners guanyades o perdudes no depenen de l'ordre en què han tingut lloc.

Compte corrent 1	Compte corrent 2
+150 - 600 = -450	-600 + 150 = -450

Aquesta característica s'anomena **propietat commutativa** i és pròpia de la suma de nombres enters.

Observa ara aquests dos comptes corrents:

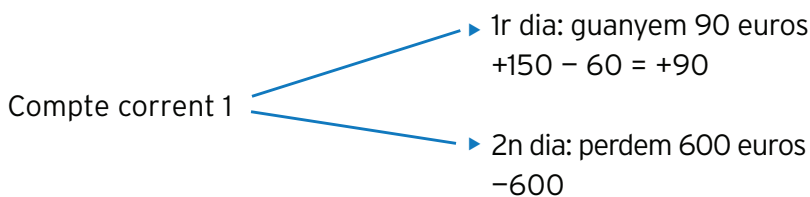
Compte corrent 1

BANCA NOSTRA			
14 de maig de 2002	Ingrés		+150 €
14 de maig de 2002	Llum		-60 €
15 de maig de 2002	Lloguer		-600 €

Compte corrent 2

BANCA NOSTRA			
14 de maig de 2002	Ingrés		+150 €
15 de maig de 2002	Llum		-60 €
15 de maig de 2002	Lloguer		-600 €

Tot i que els moviments efectuats en els comptes corrents s'han agrupat en dies diferents, és clar que el guany o la despesa final serà la mateixa:

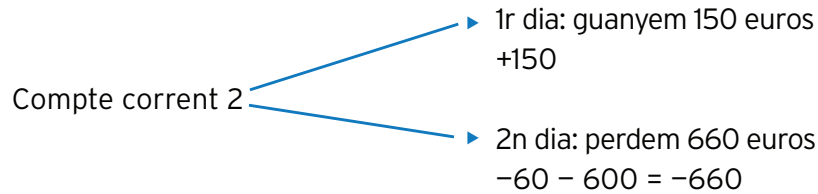


Escrivim les operacions corresponents al primer compte:

$$(+150 - 60) - 600 = +90 - 600 = -510.$$

Hem agrupat amb un parèntesi les operacions que han tingut lloc el primer dia.

El saldo final és de -510 €.



Escrivim les operacions corresponents al segon compte:

$$150 + (-60 - 600) = +150 + (-660) = +150 - 660 = -510.$$

Hem agrupat amb un parèntesi les operacions que han tingut lloc el segon dia. També es pot escriure de la manera següent:

$$150 - (60 + 600) = +150 - (+660) = +150 - 660 = -510.$$

Hem restat directament als 150 euros inicials la despesa total del segon dia, que són 660 euros.

Les dues opcions són correctes.

Tant el primer compte corrent com el segon tenen la mateixa despesa final, 510 euros. El resultat final no depèn de la manera com s'agrupen les operacions. Aquesta característica s'anomena **propietat associativa** i és pròpia de la suma de nombres enters.

2. Producte i divisió de nombres enters

Observa l'estat del teu compte corrent al començament del mes de maig:

BANCA NOSTRA		
1 de maig de 2002	Nòmina	1.000 €
2 de maig de 2002	Llum	-60 €
	Gas	-40 €
	Ingrés	+150 €
	Lloguer	-600 €

En un parell de dies has guanyat 450 euros:

$$1.000 + (-60 - 40 + 150 - 600) = 1.000 + (-700 + 150) = 1.000 + (-550) = 1.000 - 550 = 450.$$

Imagina que el mes següent es doblen totes les quantitats dels moviments del compte corrent. L'extracte del compte presentarà aquest aspecte:

BANCA NOSTRA		
1 de juny de 2002	Nòmina	2.000 €
2 de juny de 2002	Llum	-120 €
	Gas	-80 €
	Ingrés	+300 €
	Lloguer	-1.200 €

Duplicar o doblar significa multiplicar una quantitat pel nombre natural 2 o, el que és el mateix, per l'enter positiu (+2). Per tant, les quantitats del mes de juny seran:

$$1.000 \times 2 = 2.000$$

$$(-60) \times (+2) = -120$$

$$(-40) \times (+2) = -80$$

$$(+150) \times (+2) = +300$$

$$(-600) \times (+2) = -1.200$$

En cada cas, perdrem el doble o guanyarem el doble.

Imagina ara que el mes següent les quantitats es redueixen a la meitat. El compte corrent mostrarà aquest altre aspecte:

BANCA NOSTRA		
1 de juny de 2002	Nòmina	500 €
2 de juny de 2002	Llum	-30 €
	Gas	-20 €
	Ingrés	+75 €
	Lloguer	-300 €

En aquest cas les quantitats s'han de dividir pel nombre natural 2 o, el que és el mateix, per l'enter positiu (+2). Les quantitats del mes de juny seran:

$$1.000 : 2 = 500$$

$$(-60) : (+2) = -30$$

$$(-40) : (+2) = -20$$

$$(+150) : (+2) = +75$$

$$(-600) : (+2) = -300$$

Hi ha una regla pràctica molt útil que agilita les operacions de **producte i divisió de nombres enters**. Només cal:

- Multiplicar o dividir els valors absoluts dels nombres enters.
- Al nombre que s'obté d'aquest producte o d'aquesta divisió se li afegeix el corresponent signe positiu o negatiu segons la taula següent:

Multiplicació			Divisió		
	+	-		+	-
+	+	-	+	+	-
-	-	+	-	-	+

Exemples:

$$(-5) \times (+2) = -10$$

$$(-4) \times (-3) = +12$$

$$(-15) : (-3) = +5$$

$$(+8) : (-4) = -2$$

- **Activitats d'aprenentatge 9 i 10**

Propietat distributiva

Torna a observar aquests dos comptes corrents:

Compte corrent 1

BANCA NOSTRA			
1 de maig de 2002	Nòmina		1.000 €
2 de maig de 2002	Llum		-60 €
	Gas		-40 €
	Ingrés		+150 €
	Lloguer		-600 €

Compte corrent 2

BANCA NOSTRA			
1 de juny de 2002	Nòmina		2.000 €
2 de juny de 2002	Llum		-120 €
	Gas		-80 €
	Ingrés		+300 €
	Lloguer		-1.200 €

Ja has vist que els dos primers dies de maig has guanyat 450 euros. És lògic pensar que els dos primers dies del mes de juny guanyaràs el doble, 900 euros, ja que totes les quantitats estan doblades, ja siguin ingressos o despeses.

Mes de juny:

$$2.000 + (-120 - 80 + 300 - 1.200) = 2.000 + (-1.400 + 300) = 2.000 + (-1.100) = 2.000 - 1.100 = 900.$$

En efecte, el guany és el doble, és a dir, 900 euros.

Dit d'una altra manera:

$$2 \times (1.000 - 60 - 40 + 150 - 600) = 2.000 - 120 - 80 + 300 - 1.200$$

operacions 1er compte operacions 2on compte

Aquesta característica dels nombres enters es coneix amb el nom de **propietat distributiva del producte respecte de la suma**.

El pas invers a la propietat distributiva s'anomena **treure factor comú (tfc)**. En el segon compte corrent, sabem que les quantitats corresponen al doble d'unes altres:

$$2.000 = 2 \times 1.000$$

$$-120 = (+2) \times (-60)$$

$$-80 = (+2) \times (-40)$$

$$+300 = (+2) \times (+150)$$

$$-1.200 = (+2) \times (-600)$$

En aquest cas el factor comú a totes aquestes quantitats és el nombre (+2). Per tant:

$$2.000 - 120 - 80 + 300 - 1.200 = (+2) \times (1.000 - 60 - 40 + 150 - 600)$$

tfc

L'operació producte de nombres enters compleix les **propietats commutativa i associativa** com també passava amb l'operació suma.

Exemple 1

$$(-5) \times (-2) = (-2) \times (-5)$$

Si fem les operacions:

$$(-5) \times (-2) = +10$$

i

$$(-2) \times (-5) = +10$$

Acabem de comprovar que la igualtat és certa i per tant es compleix la propietat commutativa.

Exemple 2

$$[(-5) \times (-2)] \times (+2) = (-5) \times [(-2) \times (+2)]$$

Si fem les operacions que hi ha al davant de la igualtat es té:

$$[(-5) \times (-2)] = (+10)$$

$$(+2)$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \quad (+10) \times (+2) = (+20)$$

Si fem les operacions que hi ha al darrera de la igualtat es té:

$$(-5)$$

$$[(-2) \times (+2)] = (-4)$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \quad (-5) \times (-4) = (+20)$$

Els dos resultats són el mateix. Per tant, la igualtat és certa i es compleix, doncs, la propietat associativa.

Pots observar que per agrupar els nombres enters de l'exemple de la propietat associativa hem utilitzat uns parèntesis diferents per tal de facilitar la lectura de les operacions. Aquests parèntesis s'anomenen claudàtors []. També es poden utilitzar les claus { } per agrupar operacions que ja contenen parèntesis i claudàtors.

L'element neutre tant del producte com de la divisió és el nombre enter positiu (+1). Si multipliquem o dividim qualsevol nombre enter per (+1) ens torna a donar el mateix nombre.

Exemple:

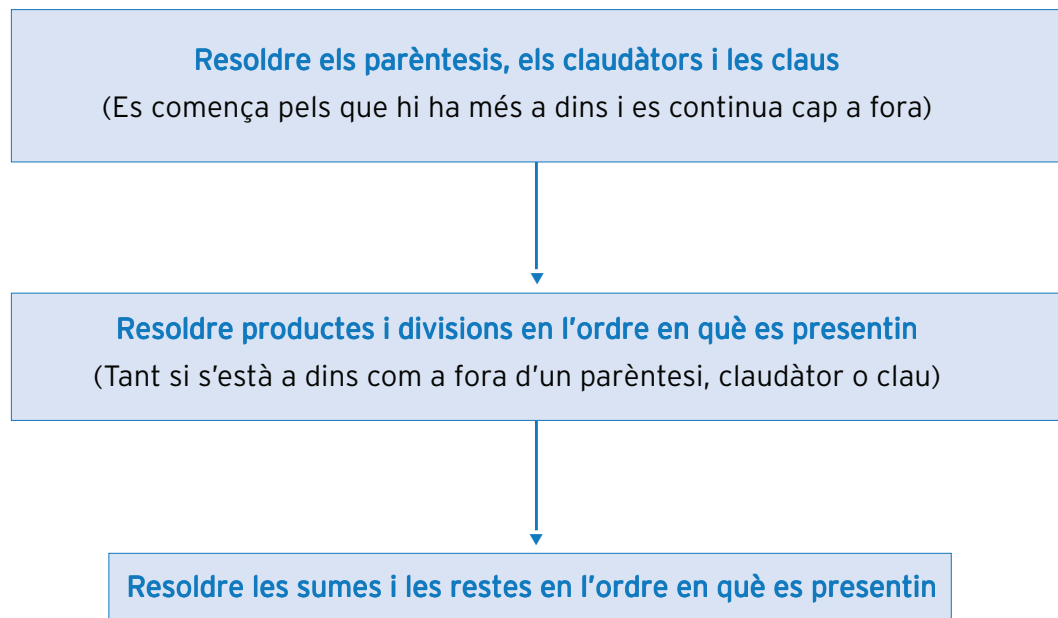
$$(-5) \times (+1) = (-5)$$

$$(-10) : (+1) = (-10)$$

- **Activitat d'aprenentatge 11**

3. Operacions combinades amb nombres enters

Quan volem resoldre operacions amb nombres enters que contenen alhora sumes, restes, productes, divisions, parèntesis i fins i tot claudàtors i claus cal seguir l'ordre següent:



Exemple:

$$[3 \times (5 - 2)] + [3 \times (2 + 7 - 6)]$$

En primer lloc resollem els parèntesis:

$$[3 \times (+3)] + [3 \times (+3)]$$

Seguidament fem els productes:

$$(+9) + (+9)$$

Finalment fem la suma:

$$9 + 9 = 18$$

És a dir:

$$[3 \times (5 - 2)] + [3 \times (2 + 7 - 6)] = [3 \times (+3)] + [3 \times (+3)] = (+9) + (+9) = 9 + 9 = 18$$

- **Activitats d'aprenentatge 12, 13, 14, 15 i 16**