Unitat 2

TEOREMA DE TALES.
TEOREMA DE PITÀGORES.
RAONS TRIGONOMÈTRIQUES

què treballaràs?

En acabar la unitat has de ser capaç de:

- **Reconèixer segments proporcionals i la seva raó de proporció.**
- **Aplicar el teorema de Tales.**
- **Distingir triangles en posició de Tales.**
- **Distingir triangles semblants. Utilitzar la semblança de triangles per calcular elements geomètrics.**
- **Aplicar el teorema de Pitàgores per al càlcul d'elements geomètrics.**
- **Interpretar les raons trigonomètriques d'un angle agut d'un triangle rectangle.**
- **Utilitzar les raons trigonomètriques d'un angle agut per resoldre triangles rectangles.**
- **Utilitzar la calculadora per al càlcul de raons trigonomètriques.**
- **Representar mitjançant figures geomètriques senzilles l'enunciat d'un problema.**

1. Proporcionalitat de segments

Mitjançant les fotografies, les fotocòpies, els plànols, els mapes, etc., podem fer ampliacions o reduccions de la realitat per tal de fer-la més accessible i més còmoda de treballar.

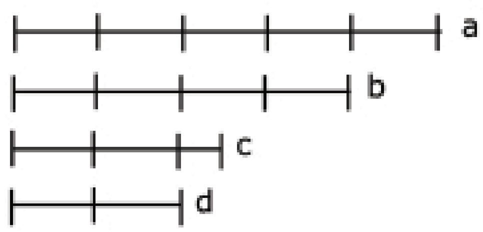
Observa aquestes dues imatges:

Totes dues tenen la mateixa forma però la mida és diferent. Tanmateix, fixa't que se'n conserven les proporcions.

En matemàtiques es diu que les dues imatges són proporcionals o semblants.

Fes memòria i recorda el que és una raó i una proporció. Una raó és el quocient de dos nombres o de dues quantitats comparables. Una proporció és la igualtat entre dues raons.

Ara observa els següents segments:



a = 5 cm
b = 4 cm
c = 2,5 cm
d = 2cm

La raó de dos segments és el nombre que resulta de dividir les longituds dels dos segments.

Pots comprovar que la raó dels segments a i b és:

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

I que la raó dels segments c i d és:

$$\frac{c}{d} = \frac{2,5}{2} = 1,25$$

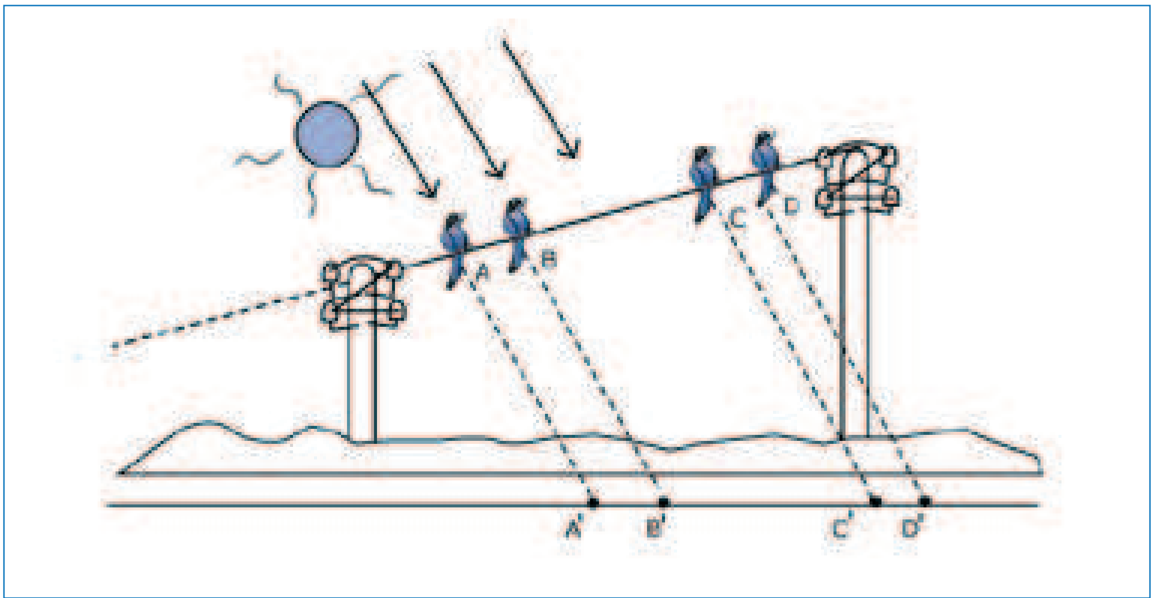
Fixa't que la raó dels segments a i b és la mateixa que la dels segments c i d. Hi ha una proporció.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Quan això passa es diu que **els segments a i b són proporcionals als segments c i d.**

2. Teorema de Tales

Fixa't en la imatge següent:



Després d'haver mesurat les longituds dels segments del cable, AB i CD, i les longituds dels segments de l'ombra, A'B' i C'D', s'observa que:

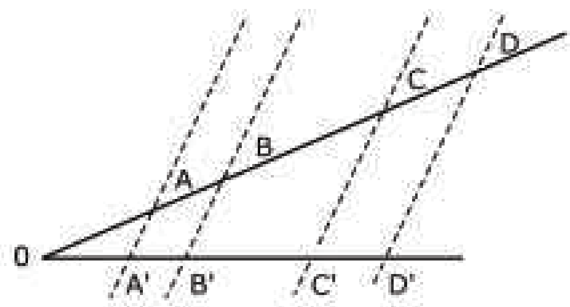
$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

$\frac{AB}{CD}$ i $\frac{A'B'}{C'D'}$ formen una proporció.

Això no és res més que un exemple del **Teorema de Tales.**

Teorema de Tales: Les rectes paral·leles traçades sobre dues rectes secants determinen segments que són proporcionals.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$



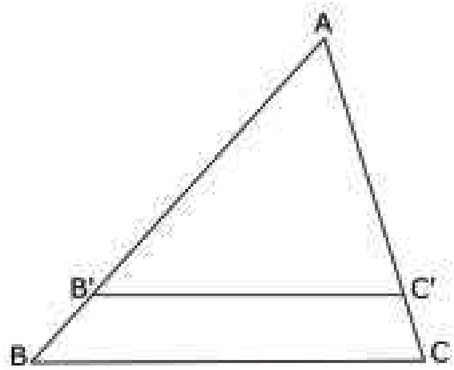
En el nostre exemple les rectes paral·leles són els raigs de sol i les dues rectes secants són el cable de la llum i la projecció de l'ombra.

- **Activitats d'aprenentatge 1, 2 i 3**

3. Triangles en posició de Tales

Si en un triangle qualsevol ABC tracem una recta paral·lela al costat BC obtenim un nou triangle AB'C'. Els dos triangles ABC i AB'C' estan en posició de Tales.

El teorema de Tales ens permet relacionar els costats d'aquests dos triangles:



Es compleix la igualtat

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{AC'}$$

Si dos triangles tenen un vèrtex comú i els costats oposats a aquest vèrtex són paral·lels es diu que estan en posició de Tales.

- **Activitats d'aprenentatge 4 i 5**

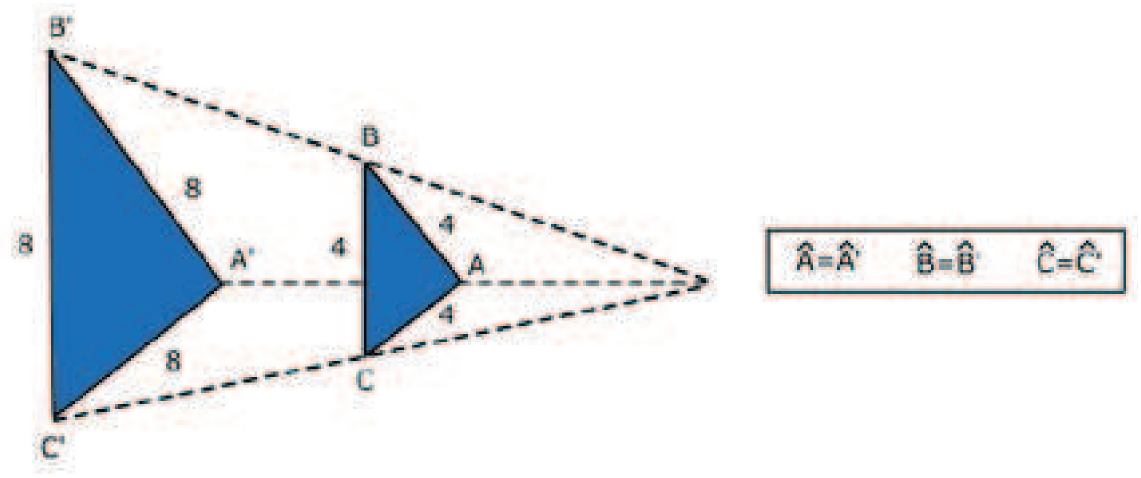
4. Triangles semblants

Observa que els triangles en posició de Tales tenen la mateixa forma però diferent mida. Els triangles en posició de Tales són figures semblants. Per això se'ls anomena triangles semblants.

Ara bé, no cal que dos triangles estiguin en posició de Tales perquè siguin semblants.

Dos triangles que tinguin els angles iguals i els costats proporcionals són triangles semblants.

Quan s'amplia o es redueix un triangle s'obté un nou triangle semblant al primer.



En la imatge, la relació entre els costats dels triangles és:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{8}{4}=2$$

Aquesta és la raó de semblança.

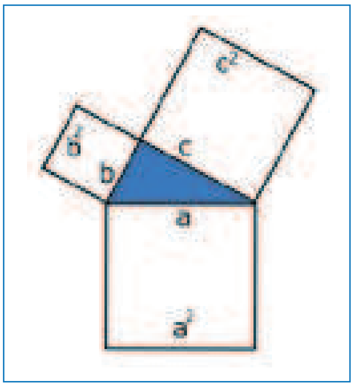
En aquest exemple la mida del triangle A'B'C' és el doble que la del triangle ABC o el que és el mateix, les longituds dels costats del triangle A'B'C' mesuren el doble que les del triangle ABC.

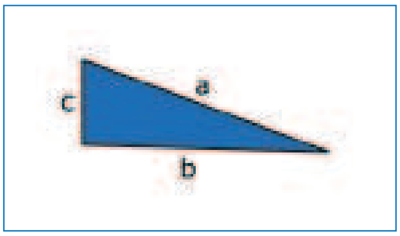
Fixa't que en els triangles semblants també es conserven els angles.

- **Activitats d'aprenentatge 6 i 7**

5. Teorema de Pitàgores

Amb l'ajut de la geometria es pot veure fàcilment una propietat molt important que compleixen els triangles rectangles: l'àrea del quadrat construït sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle és igual a la suma de les àrees dels quadrats construïts sobre els seus catets.



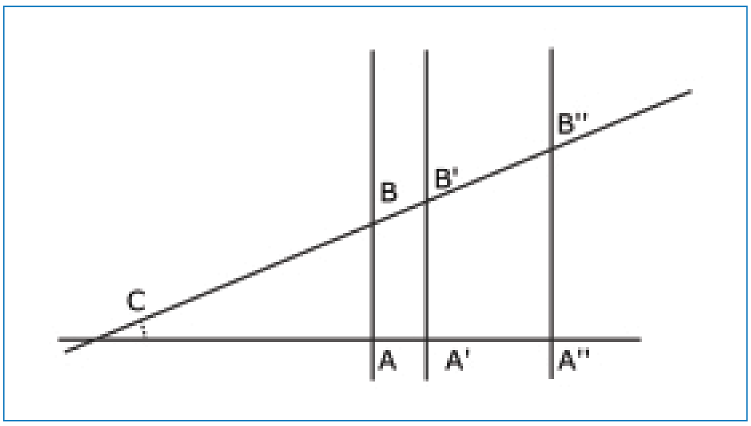


Teorema de Pitàgores: En un triangle rectangle el quadrat de la hipotenusa és igual a la suma dels quadrats dels seus catets.
$a^2 = b^2 + c^2$

- **Activitats d'aprenentatge 8, 9 i 10**

6. Triangles rectangles semblants

Per tal que dos triangles rectangles siguin semblants només cal que coincideixin en algun dels angles no rectes. Observa la figura:



Pots comprovar que, en efecte, els triangles CAB, CA'B', CA''B'' són semblants.

Fixa't en els quocients següents:

$$\frac{AB}{CB} \quad \frac{A'B'}{CB'} \quad \frac{A''B''}{CB''}$$

Observa que cada quocient és la raó entre la longitud del catet oposat al vèrtex C i la longitud de la hipotenusa de cadascun dels triangles.

Per la semblança dels triangles tenim:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{A'B'}{CB'} = \frac{A''B''}{CB''}$$

El valor d'aquesta raó s'anomena sinus d'α, sent α l'angle corresponent al vèrtex C, és a dir, l'angle que formen les dues rectes secants.

La raó entre les longituds del catet oposat i de la hipotenusa s'anomena sinus de l'angle.

$$\sin \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}}$$

Ara fixa't en aquests altres quocients:

$$\frac{CA}{CB} \quad \frac{CA'}{CB'} \quad \frac{CA''}{CB''}$$

Observa que cada quocient és la raó entre la longitud del catet contigu al vèrtex C i la longitud de la hipotenusa de cadascun dels triangles.

Com abans, per la semblança dels triangles tenim:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CA'}{CB'} = \frac{CA''}{CB''}$$

El valor d'aquesta raó s'anomena cosinus d'α, sent α l'angle corresponent al vèrtex C, és a dir, l'angle que formen les dues rectes secants.

La raó entre les longituds del catet contigu i de la hipotenusa s'anomena cosinus de l'angle.

$$\cos \alpha = \frac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}}$$

Finalment, fixa't en aquests altres quocients:

$$\frac{AB}{CA} \quad \frac{A'B'}{CA'} \quad \frac{A''B''}{CA''}$$

Observa que cada quocient és la raó entre la longitud del catet oposat i la longitud del catet contigu.

Una vegada més, per la semblança dels triangles tenim:

$$\frac{AB}{CA} = \frac{A'B'}{CA'} = \frac{A''B''}{CA''}$$

El valor d'aquesta raó s'anomena tangent d'α, sent α l'angle corresponent al vèrtex C, és a dir, l'angle que formen les dues rectes secants.

La raó entre les longituds del catet oposat i del catet contigu s'anomena tangent de l'angle.

$$\tan \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet contigu}}$$

Aquestes raons que hem definit, sinus, cosinus i tangent, s'anomenen raons trigonomètriques de l'angle α.

6. Les raons trigonomètriques i la calculadora

Mitjançant la calculadora podem obtenir el sinus, el cosinus i la tangent d'un angle agut amb molta precisió.

Imagina que vols calcular el cosinus de 60º. Si a la pantalla hi surt el terme *DEG*, vol dir que hi podem introduir els graus sexagesimals. En aquest cas s'ha d'escriure el nombre 60. A continuació prems la tecla *cos*. Veuràs que a la pantalla apareix el valor 0.5.

En efecte, cos 60º = 0.5.

Per calcular un sinus cal prémer la tecla *sin* i per la tangent, la tecla *tan*.

Raons trigonomètriques dels angles aguts més corrents:

ANGLES	sin	cos	tan
0º	0	1	0
30º	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45º	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60º	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$

- **Activitats d'aprenentatge 11, 12, 13, 14, 15, 16 i 17**