Sèrie 2

Exercicis Opció A

A1.- Calculeu i simplifiqueu la derivada de la funció $f(x) = 2\ln(x-1) + \frac{1}{x-1}$.

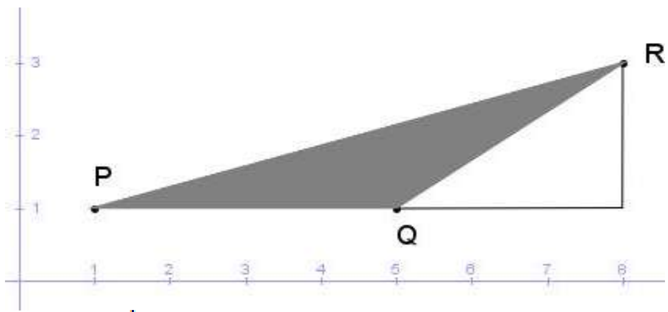
Solució:
Calculem la derivada de la funció:

$$f'(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{(0)(x-1)-1\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)-1}{(x-1)^2} = \frac{2x-3}{(x-1)^2}.$$

Puntuació: 0,5 punts pel càlcul de la derivada i 0,5 punts per la simplificació.

A2.- Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs $P(1,1)$, $Q(5,1)$ i $R(8,3)$.

Solució: A la representació inferior podem comprovar que la base del triangle és $b = 5-1 = 4$, i l'altura és $a = 3-1 = 2$.



L'àrea del triangle és $A = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2 = 4$.

Puntuació: 1 punt.

A3.- Indiqueu una primitiva de la funció $f(x) = 4x^3 - e^x$.

Solució: Una primitiva és $F(x) = x^4 - e^x$, perquè $F'(x) = f(x)$.

Puntuació: 0,5 punts per cadascun dels sumands expressat correctament.

A4.- Justifiqueu que per a tots els valors de a el sistema $\left.\begin{array}{r}(a+1)x + ay = 4\\ (2-a)x + (a+1)y = 7\end{array}\right\}$ té una única solució.

Solució: Per tal que aquest sistema sigui compatible determinat és necessari i suficient que la matriu del sistema tingui determinant no nul:
$$det\begin{pmatrix} a+1 & a \\ 2-a & a+1 \end{pmatrix} = (a+1)^2 - a(2-a) = a^2 + 2a + 1 - 2a + a^2 = 2a^2 + 1$$

L'equació $2a^2 + 1 = 0$ no té solucions reals, per tant, el determinant és sempre diferent de zero.

Puntuació: 0,5 pel càlcul del determinant; 0,5 punts per la interpretació del resultat.

A5.- Escriviu una equació del pla que conté la recta r: $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$ i és paral·lel a la recta s: $(x,y,z)=(3,-1,2)+\lambda(1,0,1)$.

Solució: Amb cadascuna de les rectes tenim un vector director del pla, $u=(3,1,2), v=(1,0,1)$. A més, de la recta r tenim el punt $P(-1,1,0)$.
Una equació del pla és $(x,y,z)=(-1,1,0)+\lambda(3,1,2)+\mu(1,0,1)$. També és possible determinar el pla com $det\begin{pmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=x-y-z+2=0$.

Puntuació: 0,5 punts per la determinació dels vectors directors i el punt; 0,5 punts per l'expressió de l'equació del pla.

Exercicis Opció B

B1.- Determineu l'equació de la recta tangent a la funció $f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x-2}$ en el punt d'abcissa $x=4$.

Solució: L'equació de la recta tangent a la funció és $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
Calculem els coeficients d'aquesta equació:

$$f(a)=f(4)=\frac{16-8+4}{4-2}=6.$$

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-2)-(x^2-2x+4)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2};\ f'(a)=f'(4)=\frac{16-16}{(4-2)^2}=0.$$

L'equació resulta ser $y=0\cdot(x-4)+6$, és a dir $\boxed{y=6}$ (es tracta d'una recta horitzontal).

Puntuació: 0,5 punts per la determinació del pendent de la recta tangent, i 0,5 punts per l'equació de la recta.

B2.- Justifiqueu que la matriu inversa i la matriu transposada de la matriu $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ són iguals, és a dir, que $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^T$.

Solució: Per justificar que $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^T$, és suficient que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^T\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$.

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puntuació: 0,5 punts pel raonament que porta la justificació de la igualtat; 0,5 punts pel producte de les matrius. No és necessària la formulació dels dos productes matricials. Considereu correctes altres resolucions, com el càlcul de la matriu inversa.

B3.- Escriviu una primitiva de la funció $f(x) = \frac{2}{x} - 3x^5$.

Solució: Una primitiva és $F(x) = 2\ln(x) - \frac{1}{2}x^6$, perquè $F'(x) = f(x)$.

Puntuació: 0,5 punts per cadascun dels sumands expressat correctament.

B4.- Justifiqueu que la recta r: $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{4}$ i el pla $\pi: 3x - 2y - 2z = 0$ són paral·lels.

Solució: Per tal que la recta i el pla siguin paral·lels cal que el vector director de la recta, $v = (2, -1, 4)$, i el vector normal del pla, $n = (3, -2, -2)$, siguin perpendiculars, és a dir, que el seu producte escalar sigui igual a zero. En efecte, $v \cdot n = (2, -1, 4) \cdot (3, -2, -2) = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) = 0$.

Puntuació: 0,5 punts per un raonament vàlid sobre la posició relativa del pla i la recta. 0.5 punts per la correcció dels càlculs. Considereu correctes altres alternatives a la solució, com per exemple, comprovar que no existeix la intersecció entre el pla i la recta.

B5.- Justifiqueu que els plans $\pi_1: 2x - y + 4z = 0$ i $\pi_2: 3x + 2y - z = 1$ són perpendiculars i comproveu que $P(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 0)$ és un punt d'intersecció entre els dos plans.

Solució: Els plans són perpendiculars perquè els seus vectors normals ho són, és a dir, perquè el producte dels vectors normals és igual a zero.
$v_1 \cdot v_2 = (2, -1, 4) \cdot (3, 2, -1) = 6 - 2 - 4 = 0$

La intersecció dels plans és una recta; el sistema d'equacions format per les dues equacions dels plans serà un sistema compatible indeterminat i es tracta de comprovar que $P(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 0)$ és una solució particular del sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 0 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Substituïm en el sistema el punt $P(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 0)$

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 2 \cdot \frac{1}{7} - \frac{2}{7} + 4 \cdot 0 = 0 \\ 3x + 2y - z = 3 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} - 0 = 1 \end{cases}$$

El punt $P(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 0)$ és un punt de la intersecció dels plans.

Puntuació: 0,5 punts per la perpendicularitat dels plans; 0,5 punts per la comprovació del punt d'intersecció.

Problema 1.-

Considereu els punts $P(-2,2)$ i $Q(0,4)$.

a) Escriviu una equació de la recta r_1 que passa pels punts P i Q.

b) Comproveu que la recta $r_2: y = x + 2$ passa pel punt $R(0,2)$ i és paral·lela a la recta r_1 determinada en l'apartat anterior.

c) Determineu el punt T de la recta r_2 equidistant dels punts P i Q, és a dir, que està situat a la mateixa distància del punt P i del punt Q, de manera que $d(P,T) = d(Q,T)$. Calculeu aquesta distància.

Solució.-

a) Un vector director de la recta r_1 és $v = Q - P = (2,2)$. L'equació vectorial de la recta és $r_1: (x,y) = (-2,2) + \lambda(2,2)$.

b) L'equació vectorial de la recta paral·lela a r_1 que passa per $R(0,2)$ és $r_2: (x,y) = (0,2) + \lambda(2,2)$. Aquesta recta té pendent $m = \frac{2}{2} = 1$, i es pot expressar com $r_2: y - 2 = 1 \cdot (x - 0)$, és a dir, $r_2: y = x + 2$.

c) El punt $T(x,y)$ és un punt de la recta $r_2: y = x + 2$, i es pot escriure $T(x, x+2)$. Les distàncies als punts $P(-2,2)$ i $Q(0,4)$ es calculem com

$d(P,T) = \|T - P\| = \sqrt{(x+2)^2 + (x+2-2)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + x^2}$

$d(Q,T) = \|T - Q\| = \sqrt{(x-0)^2 + (x+2-4)^2} = \sqrt{x^2 + (x-2)^2}$.

Igualant les dues distàncies es té $\sqrt{(x+2)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + (x-2)^2}$.

Operant sobre la igualtat anterior tenim que

$(x+2)^2 + x^2 = x^2 + (x-2)^2$

$x^2 + 4x + 4 + x^2 = x^2 + x^2 - 4x + 4$

$8x = 0$

Per tant , el punt $T(x, x+2)$ té abcissa $x = 0$, i resulta ser $T(0,2)$. La distància de T als punts P i Q és $d(P,T) = d(Q,T) = 2$.

Puntuació.- 1 punt per cadascun dels apartats **a)** i **b)**. Apartat **c)**: 2 punts per la determinació del punt T i 1 punt pel càlcul de la distància. Considereu la possibilitat de puntuar amb 0,5 aquells exercicis que, sense ser correctes, parteixin d'un esquema gràfic correcte. Penalitzeu amb 1 punt les errades de càlcul greus.

Problema 2.-

Considereu les funcions $f(x) = 4x^2 - 14x + 10$ i $g(x) = 14x^2 - 3x + 4$.

a) Comproveu que els punts d'intersecció de les dues funcions són els punts d'abcissa $x = \frac{-3}{2}$ i $x = \frac{2}{5}$.

b) Calculeu l'àrea de la regió limitada per les dues funcions des de $x = \frac{-3}{2}$ fins a $x = \frac{2}{5}$.

Solució.-

a) Igualant les dues funcions es té $4x^2 - 14x + 10 = 14x^2 - 3x + 4 \; \rightarrow \; -10x^2 - 11x + 6 = 0$. L'equació de grau 2 resultant té solucions $x = \frac{-3}{2}$, $x = \frac{2}{5}$.

Les funcions es tallen en dos punts: el punt $\left(\frac{-3}{2},\; 40\right)$ i el $\left(\frac{2}{5},\; \frac{126}{25}\right)$.

b) L'àrea resulta ser

$$A = \left| \int_{\frac{-3}{2}}^{\frac{2}{5}} [(4x^2 - 14x + 10) - (14x^2 - 3x + 4)]dx \right| =$$

$$= \left| \int_{\frac{-3}{2}}^{\frac{2}{5}} (-10x^2 - 11x + 6)dx \right| = \frac{-10x^3}{3} - \frac{11}{2}x^2 + 6x \Big|_{\frac{-3}{2}}^{\frac{2}{5}} = \frac{98}{75} - \frac{(-81)}{8} = \frac{6859}{600} =$$

$$= 11.43u^2$$

Puntuació.- Apartat ***a)*** 1 punt cada abcissa d'intersecció trobada. Apartat **b)**, 1 punt pel plantejament correcte de la integral definida, 1 punt per trobar la primitiva i 1 per l'aplicació correcta de la regla de Barrow. Considereu la possibilitat de valorar amb fins a 1,5 punts els apartats amb un càlcul adequat d'una integral definida.