SÈRIE 2

Part 1

Responeu QUATRE de les sis qüestions següents.

[6 punts; 1,5 punts per cada qüestió]

1.

Solució:

Només es pot calcular el logaritme de valors estrictament positius, per tant, el domini de la funció $f(x)$ és el conjunt de valors que verifiquen

$$\frac{1-x}{x+2} > 0$$

Aquest quocient és estrictament positiu quan numerador i denominador tenen el mateix signe:

$1-x>0$ i $x+2>0$; és a dir, $x<1$ i $x>-2$

o bé

$1-x<0$ i $x+2<0$; és a dir, $x>1$ i $x<-2$, però això és impossible

Per tant, el domini de la funció és el conjunt de valors que verifiquen $x<1$ i $x>-2$, és a dir, el domini de la funció és l'interval obert $\mathfrak{D}(f) =]-2,1[$.

Puntuació: 0,5 punts pel domini de la funció logaritme (valors estrictament positius). 0,5 punts pel cas que numerador i denominador siguin estrictament positius. 0,5 punts pel cas que numerador i denominador siguin estrictament negatius.

2.

Solució:

El domini d'aquesta funció és el conjunt de números reals excepte el valor que anul·la el denominador, $\mathfrak{D}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

Una funció és creixent quan la seva derivada és positiva.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2-4) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 4}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x-1)^2}$$

El denominador d'aquest quocient sempre és positiu, per tant, és suficient comprovar que el numerador és positiu. L'equació $x^2 - 2x + 4 = 0$ no té solucions reals, per tant, la paràbola $y(x) = x^2 - 2x + 4$ té el mateix signe per a tots els valors reals; atès que $y(0) = 4 > 0$, la paràbola és positiva i en conseqüència la derivada de la funció també ho és, i la funció resulta ser creixent.

Puntuació: 0,5 punts per la relació entre creixement i derivada de la funció. 0,5 punts pel càlcul correcte de la derivada. 0,5 punts per la justificació del signe de la derivada.

Penalització de 0,5 punts les errades greus en el càlcul de la derivada i en les operacions algebraiques.

3.

Solució:

Una primitiva és $\boxed{F(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{1}{3}e^{-3x}}$ perquè $F'(x) = f(x)$.

Puntuació: 0,5 punts per la determinació correcta del primer sumand i 1 punt per la determinació correcta del segon sumand.

4.

a) [1 punt]

Solució:

El vector $v_2 = (1, 3)$ és un vector director de la recta r_2. Els vectors directors de les rectes r_1 i r_2, $v_1 = (-1, 2)$ i $v_2 = (1, 3)$ respectivament, no són paral·lels (no són proporcionals) ni perpendiculars (el seu producte escalar no és zero):

$v_1 \cdot v_2 = (-1, 2) \cdot (1, 3) = -1 + 6 = 5 \neq 0$, per tant, les rectes r_1 i r_2 no són ni paral·leles ni perpendiculars.

Puntuació: Apartat a) 0,5 punts per la relació entre els vectors directors; 0,5 punts per la comprovació de la posició relativa de les rectes. Considereu vàlides altres respostes, com per exemple, la determinació de l'angle de les dues rectes. Considereu vàlides les respostes que justifiquen que els pendents $m_1 = -2$ i $m_2 = 3$, de les rectes r_1 i r_2, respectivament, no són iguals (les rectes no són paral·leles) ni inversos i oposats (les rectes no són perpendiculars).

b) [0,5 punts]

Solució:

La recta r_1 es pot expressar com $r_1: (x, y) = (1 - \mu, 2 + 2\mu)$, és a dir,

$\begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 2 + 2\mu \end{cases}$. Substituint en l'equació de la segona recta es té:

$2 + 2\mu = 3(1 - \mu) + 1 = 4 - 3\mu$, d'on es dedueix $\mu = \frac{2}{5}$. Per tant, el punt d'intersecció de les dues rectes és $\begin{cases} x = 1 - \mu = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \\ y = 2 + 2\mu = 2 + 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{14}{5} \end{cases}$ el punt $P\left(\frac{3}{5}, \frac{14}{5}\right)$.

Puntuació: Apartat b) 0,5 punts per la determinació correcta del punt d'intersecció.

5.

Solució:

Les matrius $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ són inverses si el seu producte és la matriu identitat d'ordre 2, és a dir, si $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ p+1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ p & \frac{-3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & \frac{p+1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ p & \frac{-3}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ p+1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{p+1}{2} & 0\\ \frac{3p}{2}-\frac{3}{2} & p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Per tant, s'han de verificar, simultàniament, les relacions següents:

$$\left.\begin{array}{r} p=1\\ \dfrac{p+1}{2}=1\\ \dfrac{3p}{2}-\dfrac{3}{2}=0\end{array}\right\}$$

L'única solució possible és $p=1$.

Puntuació: 0,5 punts per la relació entre matrius inverses. 0,5 punts pel càlcul correcte dels productes de matrius. 0,5 punts per la determinació del valor del paràmetre. Atès que les matrius són quadrades, s'han de considerar correctes les respostes que només utilitzen un dels dos productes de matrius.

6.

Solució:

La recta $r_2 : (x, y, z) = \mu(1, 1, 1)$ també es pot expressar com

$r_2 : \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = \mu \end{cases}$, és a dir, $r_2 : \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$

Les rectes r_1 i r_2 no es tallaran si el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y + z = 5 \\ x - y + z = 1 \\ x = y \\ y = z \end{array}\right\}$ és incompatible.

Substituint la tercera equació en la segona es té $z = 1$; utilitzant la tercera i quarta equacions es dedueix $z = y = x = 1$. Aquesta és l'única solució de les tres últimes equacions, però no és solució de la primera: $2x + 3y + z = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 = 6 \neq 5$. Per tant, el sistema no té cap solució, és incompatible, i les rectes no es tallen.

Puntuació: 0,5 punts per l'argumentació sobre la posició relativa de les rectes. 1 punt per qualsevol justificació correcta de l'argumentació.

Part 2

Resoleu UN dels dos problemes següents.

[4 punts en total]

1

a) [3 punts]

Solució:

La trajectòria de la pilota està donada per la paràbola $f(x) = ax^2 + bx + c$. Segons les dades, sabem que l'altura en el moment inicial ($x = 0$) és de 2 metres; i també sabem que en el moment d'encistellar ($x = 7$) l'altura és de 3,05 metres. Es té, doncs, que:

$f(0) = \boxed{c = 2}$

$f(7) = 49a + 7b + c = 49a + 7b + 2 = 3{,}05$; $49a + 7b = 1{,}05$; $\boxed{7a + b = 0{,}15}$

D'altra banda, la màxima altura s'assoleix quan $x = 4$; aquest valor ha de coincidir amb l'abscissa del vèrtex de la paràbola, o el que és el mateix, en el valor on s'anul·la la derivada de la paràbola: $f'(x) = 2ax + b$; $f'(4) = \boxed{8a + b = 0}$.

Hem de resoldre el sistema d'equacions: $\left.\begin{array}{r} 7a + b = 0{,}15 \\ 8a + b = 0 \end{array}\right\}$. Restant la segona equació de la primera es té $a = -0{,}15$. Substituint aquest valor en la segona equació, es dedueix $b = 1{,}2$.

L'equació parabòlica de la trajectòria de la pilota resulta ser:

$\boxed{f(x) = -0{,}15x^2 + 1{,}2x + 2}$.

Puntuació: Apartat a): 0,5 punts per la determinació del terme independent c; 0,5 punts per l'equació corresponent al moment d'encistellar; 1,5 punts per l'equació corresponent al màxim de la paràbola; 0,5 punts per la resolució correcta del sistema d'equacions.

b) [1 punt]

Solució:

L'altura màxima de la pilota s'assoleix quan $x = 4$; en aquest moment, l'altura de la pilota és $f(4) = -0{,}15 \cdot 16 + 1{,}2 \cdot 4 + 2 = 4{,}4$ metres.

Puntuació: Apartat b): 1 punt.

2.

a) [2 punts]

Solució:

La informació es pot resumir en una taula:

	Càpsules			
Cafès	*Forte*	*Espresso*	*Ristretto*	Disponibilitat
Arabica	6	5	4	330 kg
Robusta	2	3	4	230 kg

Grams de cafè per càpsula

Definim les incògnites següents:

x: milers de càpsules de *forte* produïdes

y: milers de càpsules de *espresso* produïdes

z: milers de càpsules de *ristretto* produïdes

Les equacions resulten ser:

La quantitat de cafè *arabica* utilitzat cada dia: $6x + 5y + 4z = 330$

La quantitat de cafè *robusta* utilitzat diàriament: $2x + 3y + 4z = 230$

La producció de *ristretto* suposa la meitat de la producció total diària: $\frac{x+y+z}{2} = z$

Atès que les incògnites estan expressades en milers d'unitats, les equacions representen kg de cafè utilitzat.

El sistema d'equacions lineals resulta ser:

$$\left.\begin{array}{r} 6x + 5y + 4z = 330 \\ 2x + 3y + 4z = 230 \\ \dfrac{x+y+z}{2} = z \end{array}\right\}$$

Puntuació: Apartat a): 0,5 punts per cadascuna de les equacions referida a la utilització de matèries primeres; 1 punt per l'equació que relaciona la producció de càpsules de ristretto amb la producció de les altres càpsules.

Penalització de 0,5 punts si no hi ha coherència en les unitats de mesura de les equacions (grams i kilograms).

b) [2 punts]

Solució:

En el *sistema anterior, podem reescriure la tercera equació, de forma que el sistema és equivalent a:*

$$\left.\begin{array}{c} 6x + 5y + 4z = 330 \\ 2x + 3y + 4z = 230 \\ x + y = z \end{array}\right\}$$

Substituint la tercera equació en les dues primeres:

$$\left.\begin{array}{c} 10x + 9y = 330 \\ 6x + 7y = 230 \\ x + y = z \end{array}\right\}$$

Multipliquem la segona equació per 5 i li restem la primera equació multiplicada per 3; aleshores: $8y = 160$, *d'on es té que* $y = 20$.

De la primera equació es té $10x + 180 = 330$, *d'on es dedueix que* $x = 15$.

Finalment, $z = x + y = 35$.

Per tant, la producció diària és:

$x = 15.000$ *càpsules de forte*

$y = 20.000$ *càpsules d'espresso*

$z = 35.000$ *càpsules de ristretto*

Puntuació: Apartat b): 1,5 punts per la resolució de qualsevol sistema plantejat en l'apartat anterior; 0,5 punts per la interpretació correcta de la solució i la coherència d'aquesta.

Penalització de 0,5 punts l'obtenció d'una solució incoherent (per exemple, valors negatius de les incògnites).